

Б-212208

В.Ф. Формалев

# ТЕПЛОПЕРЕНОС В АНИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ,  
ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ,  
ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ



$$S(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[ u_{i,j}^k(\lambda) - \tilde{u}_{i,j}^k \right]^2$$



Б-212208

В.Ф. Формалев

# ТЕПЛОПЕРЕНОС В АНИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ,  
ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ,  
ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

К

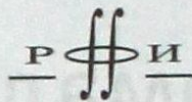


МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2015



536.2 + 577.958 + 519.6

УДК 517.9  
ББК 22.161  
Ф 79



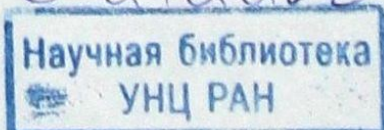
*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 15-01-07001,  
не подлежит продаже*

**Формалев В. Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 280 с. — ISBN 978-5-9221-1624-4.

В монографии впервые систематически изложены теория конечно-разностных и конечно-элементных методов численного решения задач теплопроводности в анизотропных телах, математическая теория возникновения и распространения бегущих тепловых волн и тепловых ударных волн в изотропных и анизотропных телах, а также методология численного решения граничных и коэффициентных обратных задач по восстановлению тепловых потоков на границах анизотропных тел и линейных и нелинейных компонентов тензоров теплопроводности. Предложен и обоснован по аппроксимации и устойчивости новый класс экономичных абсолютно устойчивых методов численного решения задач теории теплопроводности со смешанными производными, по запасу устойчивости не имеющих аналогов в мире. На основе нового закона волнового теплопереноса получены аналитические и численные решения задач в условиях высокоинтенсивного и существенно нестационарного нагрева анизотропных тел, разработана новая методология численного решения обратных нелинейных задач анизотропной теплопроводности, в том числе с использованием методов регуляризации.

Для инженеров и научных работников, специализирующихся в области прикладной математики, прикладной механики, теплоэнергетики, а также для преподавателей и студентов старших курсов, обучающихся по дисциплинам «Уравнения математической физики», «Численные методы», «Теория тепло-массопереноса», «Теплоэнергетика», «Термоупругость», «Волновые процессы».

Б-212208-ИИ



ISBN 978-5-9221-1624-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2015  
© В. Ф. Формалев, 2015



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Введение . . . . .	10
<b>Глава 1. Методы конечных разностей численного решения задач теплопроводности в анизотропных телах . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1. Основные определения и понятия в конечно-разностных методах . . . . .	14
1.1.1. Аппроксимация и порядок аппроксимации . . . . .	16
1.1.2. Устойчивость . . . . .	17
1.1.3. Сходимость и порядок сходимости . . . . .	18
1.1.4. Консервативность . . . . .	19
1.2. Схема метода переменных направлений . . . . .	20
1.3. Метод дробных шагов . . . . .	26
1.4. Новый класс экономичных абсолютно устойчивых методов расщепления численного решения задач теплопроводности, содержащих смешанные производные . . . . .	31
1.5. Экономичная полностью неявная конечно-разностная схема глубокого расщепления для уравнений, содержащих смешанные дифференциальные операторы, с использованием апостериорной информации . . . . .	32
1.5.1. Аппроксимация схемы метода глубокого расщепления . . . . .	37
1.5.2. Устойчивость схемы метода глубокого расщепления и обоснование введения параметра $\sigma$ . . . . .	40
1.5.3. Устойчивость схемы глубокого расщепления по правой части . . . . .	44
1.5.4. Схема глубокого расщепления в трехмерном случае . . . . .	46
1.6. Двусторонние схемы глубокого расщепления в задачах для параболических уравнений, содержащих смешанные производные и переменные коэффициенты . . . . .	48
1.7. Асимметричная схема переменных направлений для параболических уравнений со смешанными производными . . . . .	56
1.8. Схема метода глубокого расщепления в задачах для уравнений параболического типа со смешанными дифференциальными операторами и краевыми условиями, содержащими производные . . . . .	60
1.8.1. Аппроксимация в узлах $(i_1, 0)$ . . . . .	62
1.8.2. Аппроксимация в узлах $(0, i_2)$ . . . . .	64
1.8.3. Аппроксимация в угловых узлах . . . . .	66
1.9. Метод переменных направлений с экстраполяцией численного решения уравнений параболического типа со смешанными дифференциальными операторами . . . . .	69



1.9.1. Схема метода переменных направлений с экстраполяцией . . .	69
1.9.2. Аппроксимация . . . . .	72
1.9.3. Устойчивость . . . . .	74
1.9.4. Схема метода МПНЭ в трехмерном случае . . . . .	76
1.10. Методы глубокого расщепления и переменных направлений с экстраполяцией численного решения нелинейных задач для уравнений параболического типа, содержащих смешанные дифференциальные операторы. . . . .	79
1.10.1. Схема метода глубокого расщепления в нелинейных задачах для уравнений параболического типа со смешанными дифференциальными операторами . . . . .	80
1.10.2. Схема метода переменных направлений с экстраполяцией в нелинейных задачах для уравнений параболического типа, содержащих смешанные дифференциальные операторы . . . . .	90
1.10.3. Сравнительный анализ предложенных методов расщепления, учитывающих апостериорную информацию, для численного решения нелинейных задач, содержащих смешанные производные . . . . .	97
<b>Глава 2. Метод конечных элементов численного решения задач теплопроводности в анизотропных телах . . . . .</b>	<b>105</b>
2.1. Основы МКЭ . . . . .	105
2.2. Система базисных функций . . . . .	107
2.2.1. Кусочно-постоянные базисные функции . . . . .	107
2.2.2. Линейные кусочно-непрерывные базисные функции . . . . .	109
2.3. Методы взвешенных невязок. Весовые функции . . . . .	110
2.3.1. Метод поточечной коллокации . . . . .	111
2.3.2. Метод Галеркина . . . . .	111
2.3.3. Метод наименьших квадратов . . . . .	112
2.4. Конечно-элементный метод Галеркина решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	112
2.4.1. Слабая формулировка метода Галеркина . . . . .	113
2.4.2. Формирование локальной и глобальной матриц жесткости. Ансамблирование элементов . . . . .	115
2.4.3. Случай граничных условий, содержащих производные . . . . .	119
2.5. Метод конечных элементов в стационарных задачах теплопроводности анизотропных тел . . . . .	120
2.5.1. Основные этапы решения стационарных задач анизотропной теплопроводности методом конечных элементов . . . . .	120
2.5.2. Принципы разбиения плоских областей на конечные элементы . . . . .	122
2.5.3. Аппроксимация линейными многочленами и базисные функции . . . . .	123
2.5.4. Слабая формулировка конечно-элементного метода Галеркина . . . . .	125
2.5.5. Ансамблирование элементов и построение глобальной СЛАУ . . . . .	131
2.6. Метод конечных элементов в многомерных нестационарных задачах теплопроводности анизотропных тел . . . . .	132



2.7. Особенности решения пространственных задач теплопроводности в анизотропных телах методом конечных элементов . . . . .	135
2.8. Оценка погрешности метода конечных элементов . . . . .	137
2.8.1. Погрешность конечно-элементного метода решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	137
2.8.2. Погрешность конечно-элементного метода решения задач для уравнений в частных производных, содержащих смешанные дифференциальные операторы . . . . .	142
<b>Глава 3. Тепловые волны в изотропных и анизотропных телах . .</b>	<b>146</b>
3.1. Новый закон волнового теплопереноса. . . . .	146
3.2. Возникновение и распространение бегущих тепловых волн . . . . .	149
3.3. О тепловых ударных волнах в нелинейных твердых средах. . . . .	156
3.4. Волновой теплоперенос в анизотропном пространстве, характеристики которого зависят от температуры . . . . .	161
3.4.1. Задача Коши . . . . .	161
3.4.2. Первая начальная-краевая задача . . . . .	170
3.4.3. Условия возникновения бегущих тепловых волн в нелинейных анизотропных средах . . . . .	174
3.5. Численное моделирование волнового теплопереноса в анизотропных средах . . . . .	179
<b>Глава 4. Обратные задачи теплопроводности в анизотропных телах . . . . .</b>	<b>188</b>
4.1. Постановка обратных задач теплопроводности в анизотропных телах . . . . .	190
4.2. Общий алгоритм численного решения обратных задач идентификации постоянных параметров на основе неявных градиентных методов . . . . .	193
4.3. Существование, единственность, устойчивость решений обратных задач теплопроводности в анизотропных телах . . . . .	196
4.4. Граничная и коэффициентная обратные задачи теплопроводности на основе аналитического решения прямой задачи в анизотропном полупространстве. . . . .	200
4.5. Учет погрешностей в экспериментальных данных . . . . .	207
4.6. Коэффициентная обратная задача для параболических уравнений со смешанными производными по идентификации нелинейных компонентов тензора теплопроводности . . . . .	209
4.6.1. Постановка задачи . . . . .	209
4.6.2. Метод численного решения прямой задачи . . . . .	213
4.6.3. Решение задачи, сопряженной с прямой задачей . . . . .	217
4.6.4. Минимизация функционала невязки в неявном методе градиентного спуска . . . . .	220
4.6.5. Итерационный алгоритм численного решения обратной коэффициентной задачи по определению нелинейных компонентов тензора теплопроводности . . . . .	222



4.7. Некоторые результаты численного решения граничных и коэффициентных обратных задач теплопереноса в анизотропных телах. . .	224
4.7.1. Граничная обратная задача для уравнения теплопроводности по определению тепловых потоков к анизотропному полупространству . . . . .	225
4.7.2. Коэффициентная обратная задача для уравнения теплопроводности по восстановлению компонентов тензора теплопроводности в анизотропном полупространстве и анизотропной пластине . . . . .	228
4.7.3. Коэффициентная обратная задача для уравнения теплопроводности по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности . . . . .	234
4.8. Метод регуляризации по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропной полосы . . . . .	238
<b>Приложение 1. Варианты метода прогонки . . . . .</b>	<b>246</b>
П1.1. Скалярная прогонка . . . . .	246
П1.2. Метод прогонки с неявной аппроксимацией лучистого потока . .	249
<b>Приложение 2. Градиентные методы минимизации функций многих переменных . . . . .</b>	<b>253</b>
П2.1. Метод градиентного спуска . . . . .	253
П2.2. Метод наискорейшего спуска . . . . .	257
П2.3. Метод сопряженных направлений . . . . .	260
Список литературы . . . . .	262



Научное издание

*ФОРМАЛЕВ Владимир Федорович*

**ТЕПЛОПЕРЕНОС В АНИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ**  
**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ, ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ**

Редактор *О.В. Салецкая*  
Оригинал-макет: *Е.В. Сабеева*  
Оформление переплета: *Д.Б. Белуха*

Подписано в печать 09.06.2015. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,5. Уч.-изд. л. 19,25. Тираж 300 экз.  
Заказ №1121

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17Б  
E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru), [fmlsale@maik.ru](mailto:fmlsale@maik.ru);  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства  
в ППП «Типография «Наука»  
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6