

Б-212206

Урты

Ч.И. МАСТЮКОВ, Ш.Ч. МАСТЮКОВ

ЭЛЛИПСНАЯ  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ  
ФУНКЦИЯ

$\rho$



Б-212206

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н. ТУПОЛЕВА-КАИ»

Ч.И. МАСТЮКОВ, Ш.Ч. МАСТЮКОВ

# ЭЛЛИПСНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

*Монография*

*Под научной редакцией доктора технических наук Ш.М. Чабдарова*

К

Казань 2015



514.11 - 514(070)

УДК 514.116  
ББК В151.0  
Мас 31

*Рецензенты:*

доктор технических наук Ш.И. Вафин  
(Казанский государственный энергетический университет);  
кандидат технических наук А.Р. Сафин  
(Казанский государственный энергетический университет);  
доктор физико-математических наук Ф.М. Гайсин (КНИТУ-КАИ);  
доктор технических наук В.И. Анфиногентов  
(Поволжский государственный университет телекоммуникаций  
и информатики)

**Мастюков, Ч.И.**

Мас 31 Эллипсная тригонометрическая функция: монография / Ч.И. Мастюков, Ш.Ч. Мастюков; под научной редакцией доктора технических наук Ш.М. Чабдарова. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2015. – 176 с.

ISBN 978-5-7579-2035-1

Описаны новые эллипсные функции, представляющие собой, в отличие от круговых тригонометрических функций, функции двух переменных, позволяющие описать многие периодические кривые, описываемые ранее лишь разложив в ряд Фурье. Такие кривые как меандр или игольчатая кривая элементарно описываются эллипсной функцией. Показано, что круговая тригонометрия является частым случаем эллипсной тригонометрии. Применение эллипсных функций значительно упрощают расчеты, связанные с несинусоидальными кривыми. Приводятся примеры расчетов некоторых электрических цепей по формулам, выведенным в книге.

Предназначено для специалистов в области математики, электронной и вычислительной техники, студентов соответствующих специальностей вузов.

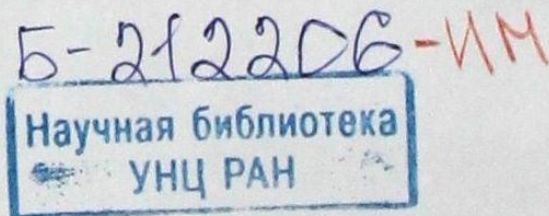
Ил. 71. Табл. 23. Библиогр.: 31 назв.

*Рекомендовано к изданию Научно-техническим советом КНИТУ-КАИ*

УДК 514.116  
ББК В151.0

ISBN 978-5-7579-2035-1

© Ч.И. Мастюков, Ш.Ч. Мастюков, 2015  
© Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2015





## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Глава 1. ЭЛЛИПСНАЯ ФУНКЦИЯ КАК ОБОБЩЕННАЯ ОДНОЗНАЧНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ .....	5
1.1. Эллипсные функции и основные понятия и определения .....	5
1.2. Эллипсная тригонометрия, ее связь с другими видами функций ...	7
1.2.1. Эллипсные функции и их связь с круговой тригоно- метрией.....	7
1.2.2. Преобразование координат. Связь с классическими тригонометрическими функциями при изменении системы координат.....	14
1.2.3. Связь круговых (синусоидальных) функций с эллипс- ными при $\sigma \neq 0$ .....	24
1.2.4. Координаты эллипса в комплексной плоскости.....	25
1.2.5. Эллипсные тригонометрические соотношения .....	30
1.2.6. Обратные эллипсные функции и их основные соотношения.....	34
1.2.7. Основные соотношения между обратными эллипсными функциями .....	38
1.2.8. Связь эллипсных функций с показательными функциями..	41
1.2.9. Связь эллипсных функций с гиперболическими.....	44
1.3. Примеры .....	45
Глава 2. ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЭЛЛИПСНЫХ ФУНКЦИЙ.....	57
2.1. Производные от эллипсных функций .....	57
2.2.1. Производные от эллипсного синуса .....	57



2.1.2. Производные от эллипсного косинуса .....	62
2.1.3. Производные эллипсного тангенса, котангенса, секанса и косеканса .....	66
2.1.4. Вторые производные от эллипсных функций.....	67
2.1.5. Вторые производные от эллипсного тангенса и котангенса .....	70
2.2. Интегралы от эллипсных функций.....	71
2.2.1. Интеграл от эллипсного синуса при $\ell < 1$ .....	71
2.2.2. Интеграл от эллипсного синуса при $\ell_v > 1$ ( $\sigma = \pi/2$ ) .....	77
2.2.3. Интеграл от эллипсного косинуса при $\ell < 1$ .....	86
2.2.4. Интегралы от эллипсного тангенса и котангенса.....	89
<b>Глава 3. ДЕЙСТВУЮЩИЕ И СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ОПИСЫВАЕМЫХ ЭЛЛИПСНЫМИ ФУНКЦИЯМИ.....</b>	<b>93</b>
3.1. Действующие значения несинусоидальных величин .....	93
3.2. Средние значения эллипсных функций.....	98
3.3. Замена несинусоидальных функций эквивалентными эллипсными и круговыми функциями, построение векторных диаграмм.....	105
3.3.1. Электрическая цепь с активным сопротивлением $R$ .....	105
3.3.2. Электрическая цепь с конденсатором при $U_s = V_m \sin(\ell, \omega t)$ .....	105
3.3.2. Электрическая цепь с катушкой индуктивности и железным сердечником. ....	107
3.3.4. Работа трансформатора в режиме холостого хода.....	114
<b>Глава 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЛИПСНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ФУРЬЕ .....</b>	<b>119</b>
4.1. Разложение эллипсного синуса в ряд Фурье.....	119
4.1.1. Разложение эллипсного синуса в ряд Фурье при $\ell < 1$ .....	120
4.1.2. Разложение эллипсного синуса в ряд Фурье при $\ell_v > 1$ .....	122
4.2. Разложение эллипсного косинуса в ряд Фурье .....	131
<b>Глава 5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ЭЛЛИПСНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ И ТОКАХ.....</b>	<b>138</b>
5.1. Электрическая цепь с катушкой индуктивности при эллипсном напряжении.....	138



5.2. Электрическая цепь с конденсатором при эллипсном напряжении .....	146
5.3. Электрическая цепь с активным $R$ и индуктивным $X_L$ сопротивлениями .....	147
5.4. Режимы работы магнето .....	162
5.5. Электрическая цепь с последовательно соединенными элементами $R$ , $L$ и $C$ при эллипсном напряжении .....	165
Список литературы.....	169



МАСТЮКОВ Чингиз Исламович  
МАСТЮКОВ Шамиль Чингизович

## ЭЛЛИПСНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

*Монография*

*Под научной редакцией доктора технических наук Ш.М. Чабдарова*

Редактор Н.И. Данич  
Компьютерная верстка – С.В. Филаретов  
Дизайн обложки – Н.Н. Семенова

---

Подписано к печати 17.03.15.

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 10,23. Тираж 500 (первый завод 1 – 150 экз.). Заказ Д14.

---

Издательство Казанского государственного технического университета  
(КНИТУ-КАИ)

Полиграфический участок Издательства. 420111, Казань, К.Маркса, 10