

Б-212198



Г. И. Курбатова

В. Б. Филиппов

КУРС ЛЕКЦИЙ  
ПО **АЛГЕБРЕ**



Б-212198

Г. И. КУРБАТОВА,  
В. Б. ФИЛИППОВ

# КУРС ЛЕКЦИЙ ПО АЛГЕБРЕ

**РЕКОМЕНДОВАНО**

*УМО вузов РФ по образованию в области прикладных математики  
и физики в качестве учебного пособия для студентов вузов,  
обучающихся по направлению «Прикладные математика и физика»,  
а также по другим математическим и естественнонаучным  
направлениям и специальностям и смежным направлениям  
и специальностям в области техники и технологий*

К



ЛАНЬ®  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР  
2015



572(076)

ББК 22.14я73

К 93

Г. И. КУРБАТОВА  
В. Б. ФИЛИППОВ

**Курбатова Г. И., Филиппов В. Б.**

**К 93** Курс лекций по алгебре: Учебное пособие. — СПб.:  
Издательство «Лань», 2015. — 656 с. — (Учебники  
для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-1905-0**

Книга представляет собой курс лекций по алгебре, читаемый в течение первых двух семестров обучения на факультете прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Материал изложен в максимально доступной форме и может быть использован в качестве учебника по общему курсу алгебры. Представленные в книге 32 лекции охватывают весь обязательный материал курса алгебры по образовательным программам подготовки бакалавров университетов и технических вузов по направлениям «Прикладная математика и физика», «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

ББК 22.14я73

**Рецензенты:**

**А. Ю. УТЕШЕВ** — доктор физико-математических наук,  
профессор Санкт-Петербургского государственного университета;  
**В. Ф. ЗАЙЦЕВ** — доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры математического анализа  
РГПУ им. А. И. Герцена.

**Обложка**

**Е. А. ВЛАСОВА**

5-212198-ИМ

Научная библиотека  
УНЦ РАН

© Издательство «Лань», 2015  
© Г. И. Курбатова, В. Б. Филиппов, 2015  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2015



## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i> . . . . .	3
<i>Обозначения</i> . . . . .	5
<b>Лекция 1. Множества. Отношения эквивалентности</b> . . . . .	9
Множества . . . . .	9
Операции над множествами . . . . .	11
Свойства операций над множествами . . . . .	13
Декартово произведение множеств . . . . .	17
Разбиение множества . . . . .	18
Конечные множества . . . . .	20
Отношение эквивалентности . . . . .	23
Свойства классов эквивалентности . . . . .	24
<b>Лекция 2. Отображения</b> . . . . .	29
Инъективные, сюръективные и биективные отображения . . . . .	31
Композиция отображений . . . . .	33
Свойства композиции отображений . . . . .	34
Обратное отображение . . . . .	35
<b>Лекция 3. Бесконечные множества. Алгебраические структуры</b> . . . . .	44
Бесконечные множества . . . . .	44
Сравнение мощностей бесконечных множеств . . . . .	48
Алгебраические структуры . . . . .	49
Задание операции, таблица Кэли . . . . .	55
Морфизмы групп . . . . .	57
Свойства гомоморфизма групп . . . . .	58
Мультипликативная и аддитивная формы записи . . . . .	60
Кольца и поля . . . . .	61
Свойства операций в кольце . . . . .	62
<b>Лекция 4. Кольцо целых чисел</b> . . . . .	67
Теория делимости в кольце целых чисел . . . . .	67
Свойства отношения делимости в кольце $\mathbb{Z}$ . . . . .	68
Примеры доказательств свойств отношения делимости . . . . .	69
Деление с остатком в кольце целых чисел . . . . .	70
Наибольший общий делитель . . . . .	72
Свойства наибольшего общего делителя . . . . .	73



Алгоритм Евклида . . . . .	74
Дальнейшие свойства наибольшего общего делителя целых чисел . . . . .	77
Доказательство свойств 6–12 наибольшего общего делителя и взаимно простых чисел . . . . .	78
<b>Лекция 5. Простые числа. Элементы комбинаторики . . . . .</b>	<b>85</b>
Простые числа . . . . .	85
Решето Эратосфена . . . . .	87
О распределении простых чисел . . . . .	89
Каноническое представление натуральных чисел . . . . .	90
Наименьшее общее кратное целых чисел $a$ и $b$ . . . . .	93
Критерий н.о.к. для целых чисел . . . . .	93
Каноническое представление наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного целых чисел . . . . .	96
Обобщение понятий наибольшего общего делителя, наименьшего общего кратного и взаимно простых чисел на $n$ целых чисел . . . . .	97
Элементы комбинаторики . . . . .	99
Простейшие свойства числа сочетаний $C_n^k$ . . . . .	104
Бином Ньютона . . . . .	104
Треугольник Паскаля . . . . .	105
Примеры биномиальных тождеств . . . . .	106
<b>Лекция 6. Поле комплексных чисел . . . . .</b>	<b>108</b>
Комплексная плоскость . . . . .	113
Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма . . . . .	113
Геометрическая интерпретация операций с комплексными числами . . . . .	115
Свойства модуля комплексных чисел . . . . .	120
<b>Лекция 7. Комплексные числа (продолжение) . . . . .</b>	<b>122</b>
Операция комплексного сопряжения . . . . .	122
Свойства операции комплексного сопряжения . . . . .	123
Возведение в степень . . . . .	125
Показательная функция комплексной переменной . . . . .	125
Применение формул Муавра и Эйлера для преобразования тригонометрических выражений . . . . .	127
Извлечение корня из комплексного числа . . . . .	128
Корни $n$ -й степени из единицы . . . . .	132
Первообразные корни $n$ -й степени из единицы . . . . .	133



<b>Лекция 8. Кольцо многочленов</b> . . . . .	137
Образующий элемент кольца многочленов . . . . .	140
Степень многочлена . . . . .	142
Умножение многочленов . . . . .	142
О функциональном и алгебраическом подходах к определению многочлена . . . . .	144
Свойства степени многочленов . . . . .	146
Отношение делимости в кольце многочленов . . . . .	149
Свойства отношения делимости в кольце многочленов . . . . .	150
Доказательства свойств отношения делимости . . . . .	151
Деление с остатком . . . . .	154
Деление многочлена на линейный многочлен $(t - \alpha)$ . . . . .	157
Схема Горнера . . . . .	158
Разложение многочлена по степеням $(t - \alpha)$ . . . . .	160
<b>Лекция 9. Теория делимости в кольце многочленов</b> . . . . .	163
Наибольший общий делитель многочленов . . . . .	163
Критерий наибольшего общего делителя многочленов $f_1, f_2$ . . . . .	166
Алгоритм Евклида . . . . .	167
Взаимно простые многочлены и их свойства . . . . .	168
Производная многочлена . . . . .	171
Формула Тейлора . . . . .	176
Наименьшее общее кратное многочленов . . . . .	178
<b>Лекция 10. Каноническое разложение многочленов</b> . . . . .	182
Свойства неприводимых многочленов . . . . .	183
Каноническое разложение многочленов над алгебраически замкнутым полем . . . . .	190
Многочлены с вещественными коэффициентами . . . . .	191
Каноническое разложение многочленов над полем вещественных чисел . . . . .	196
Разложение многочлена на неприводимые множители . . . . .	197
Выделение кратных неприводимых множителей многочлена . . . . .	198
Алгоритм отделения кратных корней многочлена $f$ . . . . .	201
<b>Лекция 11. Интерполяционные многочлены</b> . . . . .	204
Формулы Виета . . . . .	204
Задача интерполяции в классе полиномиальных функций . . . . .	209
Интерполяционный многочлен Лагранжа . . . . .	210
Интерполяционный многочлен Ньютона . . . . .	212
О нахождении корней многочленов . . . . .	215
Решение уравнений третьей степени . . . . .	216



Решение уравнения четвертой степени. Алгоритм метода Феррари . . . . .	219
<b>Лекция 12. Матрицы. Действия над матрицами . . . . .</b>	<b>223</b>
Терминология и обозначения . . . . .	223
Квадратные матрицы . . . . .	225
Свойства операции сложения прямоугольных матриц . . . . .	227
Свойства операции умножения матрицы на скаляр . . . . .	228
Умножение матриц . . . . .	229
Примеры умножения матриц . . . . .	230
Свойства операции умножения матриц . . . . .	231
Транспонирование матриц . . . . .	233
Свойства операции транспонирования . . . . .	233
Обратимые квадратные матрицы . . . . .	235
Свойства обратимых матриц . . . . .	237
Матричные единицы . . . . .	238
<b>Лекция 13. Элементарные матрицы. <math>D_r</math>-вид прямоугольной матрицы . . . . .</b>	<b>242</b>
Системы линейных уравнений . . . . .	242
Эквивалентные системы . . . . .	244
Элементарные матрицы . . . . .	245
Свойства элементарных матриц . . . . .	250
Умножение прямоугольных матриц слева на элементарные матрицы . . . . .	250
Умножение прямоугольных матриц справа на элементарные матрицы . . . . .	253
Матрица $D_r$ . . . . .	254
Отношение эквивалентности на множестве прямоугольных матриц. Ранг матрицы . . . . .	259
<b>Лекция 14. Ранг матрицы (продолжение) . . . . .</b>	<b>264</b>
Свойства ранга матрицы . . . . .	264
Элементы теории векторных (линейных) пространств . . . . .	267
Линейная комбинация, линейная зависимость (линейная независимость) векторов . . . . .	268
Свойства л.н. (л.з.) векторов . . . . .	269
Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций (основная лемма линейной алгебры) . . . . .	271
Свойства ранга матрицы (продолжение) . . . . .	280
Приложение . . . . .	287



<b>Лекция 15.</b> Системы линейных уравнений . . . . .	292
Обобщенная теорема Кронекера–Капелли о существовании и единственности решения системы $AX = B$ . . . . .	293
Решение системы линейных уравнений. Ступенчатая матрица . . . . .	300
Решение системы линейных уравнений, расширенная матрица которой эквивалентна ступенчатой матрице, не содержащей строки $(0 \dots 0   1)$ . . . . .	306
Системы линейных однородных уравнений, Ф.С.Р. . . . .	309
Пример построения Ф.С.Р. $AX = O$ при $\text{rang} A < n$ . . . . .	316
Общее решение системы линейных уравнений . . . . .	317
<b>Лекция 16.</b> Определители квадратных матриц . . . . .	319
Ориентированный объем . . . . .	320
Аксиоматические подходы к построению теории определителей . . . . .	322
Свойства определителей . . . . .	324
Определители элементарных матриц . . . . .	325
Определитель верхнетреугольной матрицы . . . . .	333
<b>Лекция 17.</b> Свойства определителей (продолжение) . . . . .	340
Определители матриц первого и второго порядков . . . . .	340
Лемма о существовании и единственности функции $\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	342
Определитель матрицы с углом нулей . . . . .	348
Разложение определителя по строке (столбцу) . . . . .	351
<b>Лекция 18.</b> Определители (продолжение) . . . . .	356
Взаимная матрица . . . . .	356
Формулы Крамера . . . . .	357
Мультипликативный подход . . . . .	360
Комбинаторно-аналитический подход к построению теории определителей . . . . .	361
Вычисление ранга матрицы с помощью теории определителей . . . . .	363
Определитель Вандермонда . . . . .	364
<b>Лекция 19.</b> Векторное (линейное) пространство . . . . .	368
Примеры векторных пространств . . . . .	371
Линейная комбинация (л.к.), линейная зависимость (л.з.) и линейная независимость (л.н.) векторов . . . . .	372
Свойства линейно зависимых (независимых) векторов . . . . .	374
Подпространства векторного пространства . . . . .	376



Линейная оболочка векторов . . . . .	379
Порождающая система векторов . . . . .	381
Свойства порождающих систем . . . . .	382
Базис векторного пространства . . . . .	384
<b>Лекция 20. Векторные пространства (продолжение)</b> . . . . .	390
Свойства операции сложения подпространств . . . . .	392
Лемма о связи размерностей суммы и пересечения подпространств . . . . .	393
Прямая сумма подпространств . . . . .	396
Дополнительные подпространства, проекция вектора на подпространство . . . . .	400
Пример 1. Построение базисов суммы и пересечения подпространств . . . . .	401
Пример 2. Проекция вектора на подпространство . . . . .	406
<b>Лекция 21. Линейные отображения векторных пространств</b> . . . . .	410
Примеры линейных отображений . . . . .	411
Ядро и образ линейного отображения . . . . .	412
Свойства линейных отображений . . . . .	414
Свойства изоморфных отображений . . . . .	417
Лемма о связи ранга и дефекта линейного отображения . . . . .	422
<b>Лекция 22. Алгебра линейных операторов</b> . . . . .	425
Векторное пространство линейных отображений . . . . .	425
Линейные операторы . . . . .	426
Матрица линейного оператора . . . . .	428
Невырожденный линейный оператор . . . . .	434
<b>Лекция 23. Подобие матриц. Ранг линейного оператора.</b> Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства прямоугольных матриц . . . . .	443
Матрица перехода . . . . .	443
Преобразование координат вектора при замене базиса . . . . .	446
Подобие матриц . . . . .	449
Свойства подобных матриц . . . . .	450
Второе определение ранга линейного оператора . . . . .	454
Матрица линейного отображения . . . . .	456
Изменение матрицы линейного отображения при заменах базисов . . . . .	460
Два определения ранга линейного отображения . . . . .	462



<b>Лекция 24.</b> Собственные векторы, собственные значения, характеристический многочлен линейного оператора . . . . .	464
Инвариантные подпространства . . . . .	464
Собственные векторы и собственные значения линейного оператора . . . . .	468
Подпространство $S_{\lambda_*}$ собственных векторов линейного оператора, отвечающих собственному значению $\lambda_*$ . . . . .	470
Характеристический многочлен линейного оператора . . . . .	474
<b>Лекция 25.</b> Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения линейного оператора, его диагонализуемость . . . . .	480
Алгебраическая и геометрическая кратности . . . . .	480
Выражения для коэффициентов характеристического многочлена, определитель и след линейного оператора . . . . .	481
Свойства следа линейного оператора . . . . .	482
Выражения коэффициентов характеристического многочлена через собственные значения линейного оператора . . . . .	485
Упрощение матрицы линейного оператора . . . . .	487
<b>Лекция 26.</b> Многочлены от линейных операторов . . . . .	492
Условия диагонализуемости линейных операторов . . . . .	492
Многочлены от линейных операторов . . . . .	500
<b>Лекция 27.</b> Циклическое подпространство. Теорема Гамильтона–Кэли . . . . .	502
Аннулятор и минимальный многочлен линейного оператора и вектора . . . . .	502
Циклическое подпространство вектора относительно линейного оператора . . . . .	505
Сопровождающая матрица Фробениуса . . . . .	508
Теорема Гамильтона–Кэли . . . . .	510
<b>Лекция 28.</b> Векторные пространства со скалярным произведением . . . . .	513
Скалярное произведение, евклидово и унитарное пространства . . . . .	513
Свойства операции скалярного произведения . . . . .	515
Введение нормы . . . . .	517
Введение угла в евклидовом пространстве . . . . .	519
Свойства ортогональных векторов . . . . .	521
Ортогональное дополнение . . . . .	524
Процесс ортогонализации Грама–Шмидта . . . . .	529



Координаты вектора в ортонормированном базисе . . . . .	531
Свойства ортогонального дополнения . . . . .	532
Ортогональная проекция вектора на подпространство . . . . .	534
Унитарное векторное пространство . . . . .	538
<b>Лекция 29. Линейные операторы в пространствах</b>	
со скалярным произведением . . . . .	540
Сопряженные линейные операторы . . . . .	540
Свойства сопряженных линейных операторов . . . . .	544
Нормальные линейные операторы и их свойства . . . . .	546
Диагонализуемость нормальных линейных операторов в унитарных пространствах . . . . .	550
Нормальные линейные операторы в евклидовых пространствах . . . . .	555
Симметричные линейные операторы в евклидовых пространствах и их свойства . . . . .	562
Спектральная характеристика симметричных линейных операторов в евклидовых пространствах . . . . .	566
Приведение матрицы симметричного линейного оператора к диагональному виду . . . . .	571
<b>Лекция 30. Антисимметричные (кососимметричные) и ортогональные операторы в евклидовых пространствах . . . . .</b>	573
Антисимметричные операторы и их свойства . . . . .	573
Разложение линейного оператора в сумму симметричного и антисимметричного линейных операторов . . . . .	577
Ортогональные линейные операторы и их свойства . . . . .	578
Ортогональные операторы на одномерных и двумерных евклидовых пространствах . . . . .	589
Ортогональные матрицы . . . . .	594
Каноническая форма матрицы ортогонального оператора . . . . .	595
<b>Лекция 31. Линейные и билинейные функции . . . . .</b>	599
Линейные функции (функционалы). Сопряженное пространство . . . . .	599
Билинейные функции . . . . .	602
Матрица билинейной функции . . . . .	603
Преобразование матрицы билинейной функции при изменении базиса . . . . .	605
Отношение конгруэнтности на множестве квадратных матриц . . . . .	607
Симметричные и антисимметричные (кососимметричные) билинейные функции . . . . .	608
Связь билинейных функций и симметричных линейных операторов в евклидовых пространствах . . . . .	611



<b>Лекция 32. Квадратичные формы</b> . . . . .	615
Связь квадратичных форм и билинейных функций . . . . .	615
О приложениях квадратичных форм . . . . .	617
Матрица квадратичной формы . . . . .	618
Приведение квадратичных форм к каноническому виду . . . . .	620
Классификация квадратичных форм и билинейных функций . . . . .	627
Закон инерции вещественных квадратичных форм . . . . .	628
Квадратичные формы в евклидовом пространстве . . . . .	630
Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду в евклидовом пространстве . . . . .	631
Приведение пары квадратичных форм, одна из которых положительно определенная, к каноническому виду . . . . .	632
<i>Основная литература</i> . . . . .	635
<i>Дополнительная литература</i> . . . . .	636
<i>Предметный указатель</i> . . . . .	637



Галина Ибрагимовна КУРБАТОВА,  
Василий Борисович ФИЛИППОВ

## КУРС ЛЕКЦИЙ ПО АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

Зав. редакцией физико-математической  
литературы *Н. Р. Нигмаджанова*  
Верстка *А. Г. Сандомирская*  
Выпускающие *О. В. Шилкова, Т. С. Симонова, Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97  
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10  
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»

lan@lanbook.ru; www.lanbook.com  
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.  
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.  
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться  
в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

по России и зарубежью

«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13  
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93  
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967  
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области

«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-я ул. Текстильщиков, д. 6/19  
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае

«ЛАНЬ-ЮГ». 350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1  
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазины:

Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>  
«Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>  
«Библион»: <http://www.biblion.ru>

Подписано в печать 15.05.15.

Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 34,44. Тираж 1000 экз.

Заказ №К-3694.

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных материалов  
в ОАО «ИПК «Чувашия».  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, д. 13.  
Тел.: (8352) 56-00-23