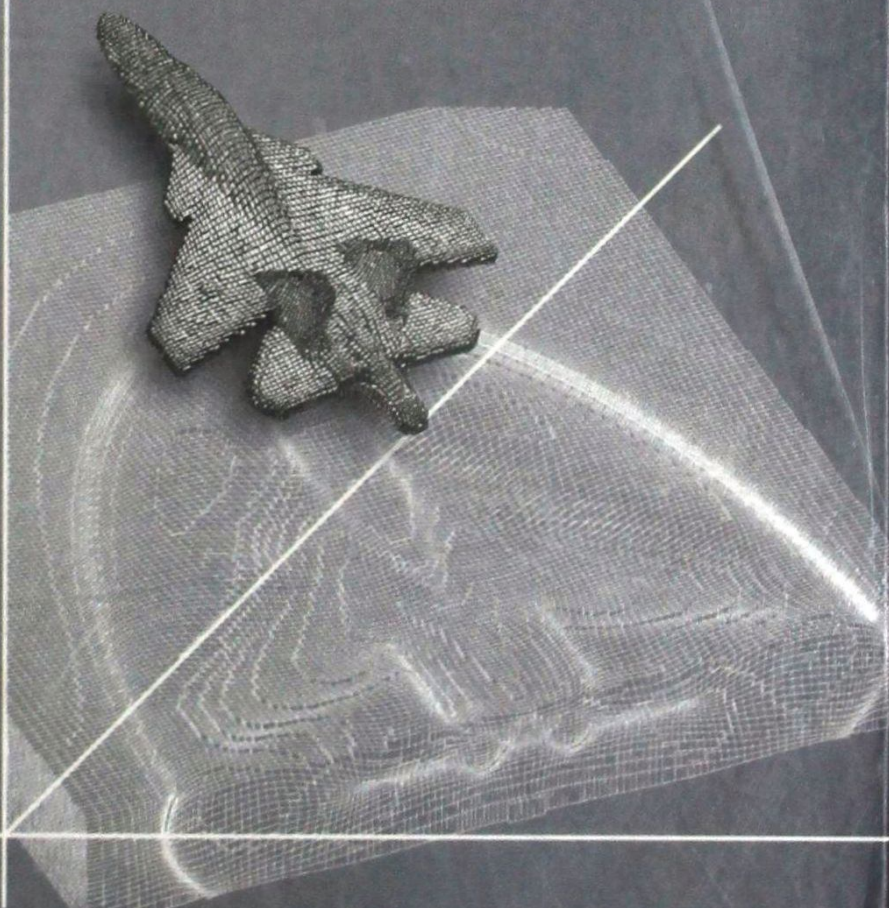


B-53091

В.Д. Лисейкин

**Разностные
сетки**

**Теория
и приложения**



B-53091

В. Д. Лисейкин

**РАЗНОСТНЫЕ СЕТКИ.
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

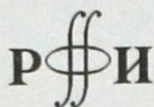
К



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
2014

579.6

УДК 519.6
ББК 22.19
Л 33



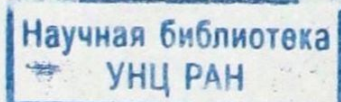
Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований по проекту № 14-01-07010,
не подлежит продаже

Лисейкин В. Д. Разностные сетки. Теория и приложения / В. Д. Лисейкин. —
Новосибирск: Издательство СО РАН, 2014. — 254 с.

В монографии обобщены и систематизированы результаты десятилетней работы в рамках грантов РФФИ по разработке методов, алгоритмов и компьютерных программ построения разностных сеток в областях и на поверхностях. Разработанные методы построения разностных сеток базируются на численном решении обращенных уравнений Бельтрами и диффузии, а также на минимизации обращенных функционалов энергии и диффузии относительно управляющей метрики. Кроме того, дано изложение разработанных алгебраических методов адаптации, использующих специальные преобразования координат для сгущения ячеек в зонах быстрых изменений функций. Представлены разнообразные виды управляющих метрик и управляющих преобразований координат для контроля свойств сеток. Подробно изложены результаты применения технологии адаптивных сеток для численного исследования задач динамики газа, жидкости и плазмы, для численного решения сингулярно-возмущенных задач диффузии, задачи распространения тепла в двухфазных средах, задачи нанотехнологий и задачи исследования наката волн цунами.

Книга предназначена для студентов, аспирантов, преподавателей и специалистов, занимающихся численными расчетами задач со сплошной геометрией границ физической области и сложной структурой решения.

B-53091-ИМ



ISBN 978-5-7692-1364-9

© Лисейкин В. Д., 2014
© Издательство СО РАН, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Часть I. Теоретическая часть	7
Глава 1. Базисные методы	11
1.1. Построение локальных структурных сеток	11
1.1.1. Схема методов отображений	11
1.1.2. Популярные методы отображений	13
1.1.3. Методы построения неструктурных сеток	20
1.2. Блочная стратегия	22
1.3. Автоматизированные программы	24
Глава 2. Координатные преобразования	26
2.1. Введение	26
2.2. Общие понятия и соотношения	27
2.2.1. Матрица Якоби	27
2.2.2. Касательные векторы	28
2.2.3. Нормальные векторы	30
2.2.4. Меры деформации ячеек координатных сеток	31
2.2.5. Дифференцирование якобиана	34
2.2.6. Дифференцирование элементов обратной матрицы	35
2.2.7. Базисное тождество	35
2.2.8. Выражение для производных в новых координатах	36
2.3. Законы сохранения	37
2.3.1. Скалярные законы сохранения	37
2.3.2. Векторные законы сохранения	39
2.4. Преобразования, зависящие от времени	43
2.4.1. Переформулировка преобразований	43
2.4.2. Базисные соотношения	44
2.4.3. Скалярные законы сохранения	45
2.4.4. Векторные законы сохранения	48
Глава 3. Алгебраические методы	53
3.1. Методы трансфинитной интерполяции	53
3.1.1. Одномерные преобразования	54
3.1.2. Двумерные преобразования	54
3.1.3. Трехмерные преобразования	55
3.1.4. Лагранжевы и эрмитовы интерполяции	60
3.1.5. Параметризация ячеек	64

3.1.6. Трансфинитная интерполяция для произвольных вычислительных областей	64
3.2. Адаптация в алгебраических методах	65
3.2.1. Базисные преобразования	69
3.2.2. Конструирование одномерных преобразований для сгущения сетки возле произвольных точек	73
Глава 4. Математическая модель для областей	76
4.1. Базисные функционалы и уравнения	76
4.1.1. Сеточные преобразования	76
4.1.2. Управляющая метрика	77
4.1.3. Функционалы энергии и диффузии	80
4.1.4. Уравнения Бельтрами	85
4.1.5. Уравнения диффузии	88
4.1.6. Обращенные функционалы	89
4.1.7. Обращенные уравнения Бельтрами и диффузии	91
4.2. Вычислительные алгоритмы	99
4.2.1. Итерационный метод конечных разностей	99
4.2.2. Метод спектральных элементов	103
4.2.3. Метод конечных элементов	104
4.2.4. Минимизация дискретного обращенного функционала энергии	106
4.2.5. Метод обращения матрицы	107
4.2.6. Примеры пространственных адаптивных сеток	110
Глава 5. Математическая модель для произвольных геометрий ...	111
5.1. Многомерные поверхности	111
5.1.1. Параметризация, касательные векторы, метрические элементы	111
5.1.2. Гиперповерхности и нормальные векторы	112
5.1.3. Нормальный вектор гиперповерхности	113
5.1.4. Средняя кривизна гиперповерхности	114
5.1.5. Мониторные поверхности	115
5.1.6. Первый и второй инварианты Бельтрами	117
5.1.7. Символы Кристоффеля для поверхностей	119
5.2. Построение сеток на поверхностях	123
5.2.1. Промежуточные преобразования	124
5.2.2. Формула, связывающая меру сгущения сетки, среднюю кривизну и инвариант Бельтрами	125
5.2.3. Управляющая метрика	128
5.2.4. Уравнения Бельтрами и диффузии	129
5.2.5. Обращенные уравнения Бельтрами и диффузии	130
5.2.6. Формулы управляющих метрик	131
5.3. Вычислительные алгоритмы	132
Глава 6. Управление свойствами сеток	135
6.1. Построение сеток, адаптирующихся к значениям функции	135
6.1.1. Управляющая метрика	135

6.1.2. Построение сеток в S^{2n} со сгущением в окрестности изолированных точек	138
6.1.3. Построение сеток со сгущением в окрестности кривых и поверхностей.....	142
6.1.4. Построение сеток в трехмерных областях со сгущением в окрестности кривых	145
6.2. Построение сеток, адаптирующихся к градиенту функции	146
6.2.1. Метрика мониторинга поверхности	146
6.2.2. Сферическая управляющая метрика	147
6.3. Построение сеток, согласованных с векторными полями	149
6.4. Построение сбалансированных сеток.....	152
Глава 7. Методы построения неструктурных сеток	153
7.1. Триангуляция Делоне	153
7.1.1. Двумерные подходы	154
7.1.2. Триангуляция Делоне для поверхности	157
7.1.3. Трехмерная триангуляция Делоне	157
7.2. Фронтальный подход.....	158
7.3. Метод восьмеричного дерева.....	158
7.4. Сквозной метод построения сеток.....	159
7.4.1. Формулировка метода.....	160
7.4.2. Триангуляция границы	162
7.4.3. Выделение граничных ячеек	163
7.4.4. Алгоритм выделения ячеек в области.....	163
7.4.5. Адаптация сетки	165
Часть II. Приложения адаптивных сеток	167
Глава 8. Численное решение сингулярно возмущенных задач	171
8.1. Обыкновенные уравнения второго порядка	171
8.1.1. Численный алгоритм.....	172
8.2. Многомерная задача.....	174
8.2.1. Преобразование задачи.....	175
8.2.2. Численное решение краевой задачи	178
8.3. Сходимость задачи.....	185
Глава 9. Задачи динамики жидкости, газа и плазмы	188
9.1. Одномерные задачи	188
9.1.1. Задача об инъекции жидкости.....	188
9.1.2. Задача о течении жидкости между двумя соосными дисками ..	189
9.1.3. Задача типа Стокса.....	190
9.2. Численное решение задачи обтекания тела вращения вязким теплопроводным газом на криволинейной подвижной сетке.....	190

9.2.1. Система уравнений осесимметричного движения вязкого теплопроводного газа	191
9.2.2. Преобразование системы координат	194
9.2.3. Численный расчет	195
9.3. Применение к задачам идеального газа	195
9.3.1. Численные расчеты на структурных сетках	196
9.3.2. Численные расчеты на неструктурных сетках	197
9.4. Численное моделирование наката волны цунами	199
9.5. Численный метод	200
9.6. Построение координатных преобразований	204
9.7. Некоторые результаты расчетов	205
9.8. Задача распространения тепла в плазме	207
Глава 10. Оценка погрешности термопарных измерений	210
10.1. Введение	210
10.2. Математическая модель взаимодействия тепловой волны с термопарой	210
10.3. Осесимметричная модель	211
10.3.1. Численный метод решения	213
10.3.2. Построение разностной сетки	214
10.3.3. Некоторые результаты расчетов	217
10.4. Трехмерная модель	221
10.4.1. Численный метод решения	221
10.4.2. Метод построения сетки	224
10.4.3. Результаты расчетов	227
Глава 11. Численное моделирование процесса формирования нанопор в пленке оксида алюминия	231
11.1. Введение	231
11.2. Математическая модель процесса	232
11.3. Численный метод решения	235
11.3.1. Численная аппроксимация	236
11.3.2. Построение разностной сетки	237
11.4. Некоторые результаты расчетов	238
Список литературы	241

Научное издание

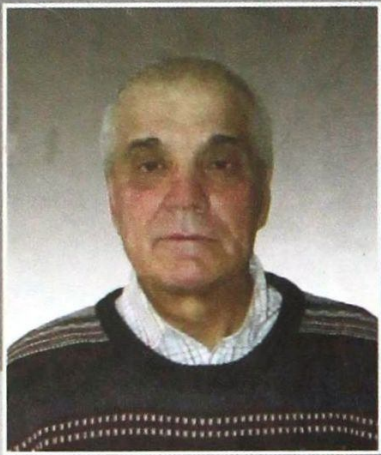
Владимир Дмитриевич Лисейкин

**Разностные сетки.
Теория и приложения**

Редактор *И. А. Абрамова*
Художественный редактор *М. Г. Рудакова*
Технический редактор *Д. В. Нечаев*

Подписано в печать 25.07.2014. Формат 70×100 1/16.
Усл. печ. л. 21,0. Уч.-изд. л. 14,8. Тираж 250 экз. Заказ № 183

Издательство СО РАН
630090, Новосибирск, Морской просп. 2
E-mail: psb@sibran.ru
тел. (383) 330-80-50
Отпечатано в Издательстве СО РАН
Интернет-магазин Издательства СО РАН
[http:// www.sibran.ru](http://www.sibran.ru)



Лисейкин Владимир Дмитриевич

Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института вычислительных технологий СО РАН, профессор Новосибирского государственного университета.

Сфера научной деятельности – разработка методов и алгоритмов построения адаптивных разностных сеток для численного решения сложных прикладных задач, теоретические исследования качественных свойств пограничных и внутренних слоев сингулярно-возмущенных задач.

Автор около 200 научных работ, в том числе 14 монографий, 4 из которых опубликованы в издательстве Springer.

